第 9 講　正弦定理，余弦定理，三角形の面積

PART1　三角形の形状

1　△ABC において，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ のとき，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ。

$$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$$

Point Pickup

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ より $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

よって　$a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C=\sin A:\sin B:\sin C$

△ABC において　$a>b>c \iff A>B>C$

（a が最大辺 $\iff$ A が最大角）

(2)　正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=2R \iff \sin A=\dfrac{a}{2R}$

余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \iff \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

などを用いて，角を消去し，辺だけの関係式を導くことで，三角形の形状を調べる。

第 9 講　PART1 確認問題

1　△ABC において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする。

$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{5} : \sqrt{2}$ のとき，△ABC の内角のうち，最も大きい角の大きさを求めよ。

最も大きい角は [ア] で，その大きさは [イ]

[[ア] の選択肢]

① A　② B　③ C

[[イ] の選択肢]

① 30°　② 45°　③ 60°　④ 90°

⑤ 120°　⑥ 135°　⑦ 150°

2　△ABC において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする。

次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ。

$$a^2\cos A\sin B = b^2\cos B\sin A$$

△ABC は，[ウ] または [エ]

ただし，当てはまる選択肢番号については，小さい方の番号を [ウ] とせよ。

① ∠A＝90° の直角三角形

② ∠B＝90° の直角三角形

③ ∠C＝90° の直角三角形

④ BC＝AC の二等辺三角形

⑤ AC＝AB の二等辺三角形

⑥ AB＝BC の二等辺三角形

第 9 講　正弦定理，余弦定理，三角形の面積

PART1　三角形の形状

1　△ABC において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ のとき，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ。

$$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$$

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

よって，条件より　$a:b:c=3:5:7$

したがって，$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$ $(k>0)$ とおける。

c が最大の辺であるから，C が最大の角である。

よって，余弦定理より

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot3k\cdot5k}=\frac{-15k^2}{2\cdot3k\cdot5k}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，最大の角の大きさは　$C=120^\circ$

(2)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理より　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\left(a-c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)\cdot\frac{b}{2R}=\left(b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\frac{a}{2R}$$

$$\frac{2a^2-(c^2+a^2-b^2)}{2a}\cdot b=\frac{2b^2-(b^2+c^2-a^2)}{2b}\cdot a$$

$$(a^2+b^2-c^2)\cdot b^2=(a^2+b^2-c^2)\cdot a^2$$

$$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2+b^2-c^2)(a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$ より　$a^2+b^2=c^2$　または　$a=b$

したがって，△ABC は

$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形　または　$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ の二等辺三角形

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：⑥

[解説]

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$ [A]

よって，条件より　$a:b:c=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$

したがって，$a=k$，$b=\sqrt{5}\,k$，$c=\sqrt{2}\,k$（$k>0$）

とおける。

ゆえに，b が最大の辺であるから，**B が最大の角**である。

また，余弦定理より

$$\cos B=\frac{(\sqrt{2}\,k)^2+k^2-(\sqrt{5}\,k)^2}{2\cdot\sqrt{2}\,k\cdot k}$$

$$=\frac{-2k^2}{2\sqrt{2}\,k^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，最大の角の大きさは　$B=\mathbf{135^\circ}$

[A]　正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

より　$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

よって

$$a:b:c$$
$$=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$$
$$=\sin A:\sin B:\sin C$$

つまり，正弦の値の比は，辺の比である。

また，△ABC において

$$a>b>c \Longleftrightarrow A>B>C$$

2 **[正解]** ウ：③，エ：④

[解説]

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$ [B]

また，余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

[B]

これらを与えられた等式

$a^2\cos A\sin B=b^2\cos B\sin A$ に代入すると

$$a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b}{2R}=b^2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a}{2R}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+b^2a^2-b^4$$

$$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$$

$$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(c^2-a^2-b^2)(a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$ より　$a^2+b^2=c^2$　または　$a=b$

よって，△ABC は

∠C＝90° の直角三角形　または

BC＝AC の二等辺三角形

> [B]
>
> 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Longleftrightarrow\sin A=\dfrac{a}{2R}$
>
> 余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
>
> などを用いて，角を消去し，辺だけの関係式を導き，三角形の形状を調べる。